§5.1, 单调函数的可微性, 思考题, page 244

1. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的非负函数. 若 $f \notin L([a,b])$, 试问 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数吗?

Proof $f(x)$ 不能有原函数. 若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$, 则 $F(x)$ 递增且 $\int_a^b f(x)dx \le F(b)-F(a)$, 意味着 $f \in L([a,b])$.

2. 设 $f_n(x)(n=1,2,\dots)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数, 且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1, \text{ a.e. } x \in (0,1),$$

试证明

$$\liminf_{n\to\infty} f_n'(x) = 0, \text{ a.e. } x \in [0,1].$$

Proof 由已知条件, 对于任意的正整数 m, 在 $(0,\frac{1}{m}]$ 和 $[1-\frac{1}{m},1)$ 上分别存在两点 a_m, b_m 使得 $f_n(a_m)\to 1$ 和 $f_n(b_n)\to 1$ 当 $m\to\infty$ 时. 因为 $f_n'(x)$ 在 $[a_m,b_m]$ 上几乎处处有定义而且 $f_n'(x)\ge 0$, a.e, 根据 Fatou 引理,

$$\begin{aligned}\int_{a_m}^{b_m} \liminf_{n\to\infty} f_n'(x)dx &\le \liminf_{n\to\infty}\int_{a_m}^{b_m} f_n'(x)dx \\ &\le \liminf_{n\to\infty}(f(b_m)-f(a_m)) = 0\end{aligned}$$

所以 $\liminf_{n\to\infty} f_n'(x)dx = 0$, a.e. $x\in[a_m,b_m]$. 从而易知这对 $x\in[0,1]$ 也是对的.

3. 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $G(x)$. $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微且 $F'(x)\ge 0(a\le x\le b)$, 试证明 $h(x)=F(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数.

Proof 我们证明 $H(x)=F(x)G(x)-\int_a^x G(t)F'(t)dt$ 是 $h(x)$ 的原函数, 这样只要证明

$$\frac{d}{dx}\int_a^x G(t)F'(t)dt = G(x)F'(x)$$

处处成立即

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} G(t)F'(t)dt = G(x)F'(x).$$

因为 G 都连续, 所以对于任意 $\epsilon>0$, 有 $|G(x+h)-G(x)|<\epsilon$ 对充分小的 h 都成立. 又 $F'\ge 0$, 所以 F 单调上升的, 那么 $\int_a^b F'(t)dt \le F(b)-F(a)$. 先考虑

$$\frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h}(G(t)-G(x))F'(t)dt\right| \le \epsilon\cdot\frac{1}{h}\int_x^{x+h}F'(t)dt \le \epsilon\frac{F(x+h)-F(x)}{h},$$

两边取上极限 $\overline{\lim}_{h\to 0}$, 再利用 ϵ 的任意性便知

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}G(t)F'(t)dt = G(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}F'(t)dt,$$

这是成立的 (见定理 5.7), 因为 F' 可积 (我们有 $\int_a^b F'(t)dt \le F(b)-F(a)$).

4. Vitali 覆盖定理的结论可以改为: 存在可数个互不相交的 $\{I_j\}$ 使得

$$m^*\Big(E\setminus\bigcup_{j\ge 1} I_j\Big) = 0.$$

Proof 原证明其实找到了一列互不相交的 $\{I_j\}$ 满足 $\sum_{j\geq 1}|I_j|\leq m^*E+1$ 及

$$I_1\cup\cdots\cup I_n\subseteq\bigcup_{j=n+1}^{\infty}5I_j.$$

对于任意的 n 皆成立.

设 $F=\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$, 那么

$$E\setminus F\subseteq\bigcup_{j=n+1}^{\infty}5I_j$$

对于任意的 n 都成立, 进而

$$m^*(E\setminus F)\leq 5\sum_{j=n+1}^{\infty}|I_j|\to 0,\quad n\to\infty.$$

5. 记 $\mathbb{Q}=\{r_n\}, f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{n^2}$, 试求 $f'(x)$ 的表达式.

Proof 注意到 $f(x)$ 是绝对收敛的, 故

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_h(x)}{n^2},$$

其中

$$D_h(x)=\frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{h}.$$

对于 $h>0$ 有

$$D_h(x)=\begin{cases}1, & r_n\leq x;\\ -1, & r_n\geq x+h,\end{cases}$$

且 $|D_h(x)|\leq 1$ 当 $r_n\in(x,x+h)$ 时. 注意到, 对于 $\epsilon>0$, 都存在 N 使得 $\sum_{n>N}1/n^2<\epsilon$; 对于这个 N 进一步存在 $h>0$ 使得 $x_1,\ldots,x_N$ 都在 $(x,x+h)$ 之外, 于是

$$\left|\sum_{n:r_n\in(x,x+h)}\frac{D_h(x)}{n^2}\right|\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\epsilon,$$

这意味着

$$\lim_{h\to 0^+}\sum_{n:r_n\in(x,x+h)}\frac{D_h(x)}{n^2}=0,$$

进而

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_h(x)}{n^2}=\sum_{n:r_n\leq x}\frac{1}{n^2}-\sum_{n:r_n>x}\frac{1}{n^2}.$$

类似地, 对于 $h<0$ 可证

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_h(x)}{n^2}=\sum_{n:r_n<x}\frac{1}{n^2}-\sum_{n:r_n\geq x}\frac{1}{n^2}.$$

所以 $f'(x)$ 在 $x\in\mathbb{Q}$ 时不存在, 而在 $x\notin\mathbb{Q}$ 时有

$$f'(x)=\sum_{n:r_n<x}\frac{1}{n^2}-\sum_{n:r_n>x}\frac{1}{n^2},\quad x\in\mathbb{Q}.$$

§5.2, 有界变差函数, 思考题, page 251

1. 计算 $\bigvee_{-1}^{1}(x-x^3)$.

Solution $f(x)=x-x^3$ 在 $[-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}]$ 上单调下降, 在 $[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$ 上单调上升, 在 $[\frac{1}{\sqrt{3}},1]$ 上单调下降. 因此

$$\begin{aligned}\bigvee_{-1}^{1} f &= \bigvee_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} f+\bigvee_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f+\bigvee_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} f\\ &= |f(-\frac{1}{\sqrt{3}})-f(-1)|+|f(\frac{1}{\sqrt{3}})-f(-\frac{1}{\sqrt{3}})|+|f(1)-f(\frac{1}{\sqrt{3}})|\\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

2. 试证明 $\bigvee_a^b f=0$ 当且仅当 $f(x)=c$ (常数).

Proof 考虑分划 $a=x_0<x_1<x_2=b$, 这个分划的变差 $|f(x_1)-f(a)|+|f(b)-f(x_1)|$ 因为全变差是 0 所以是 0. 就得到 $f(a)=f(x_1)=f(b)$ 这对任意的 $x_1\in(a,b)$ 成立. 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是常数.

3. 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b]), g\in \mathrm{BV}([a,b])$, 试证明

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$

是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

Proof

$$M(x)=\frac{|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)}{2},$$

因为 f,g 都是有界变差, 所以 $f+g$, $f-g$ 也是, 根据第 4 题, $|f+g|$ 是有界变差的, 从而 M 是有界变差的.

4. 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$ 则 $|f|\in \mathrm{BV}([a,b])$ 但反之不然.

Proof 对于 $[a,b]$ 的一个分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,

$$\sum_{i=1}^{n}||f(x_i)|-|f(x_{i-1})||\le \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

所以 $\bigvee_a^b|f|\le\bigvee_a^b f<\infty$ 从而 $|f|$ 是有界变差的.

但是

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ is rational;}\\ -1, & x \text{ is irrational.}\end{cases}$$

不是有界变差的 (作有理点和无理点交替的分划便知) 而其绝对值是有界变差的 (因为是一个常数).

5. 设 $f,g\in \mathrm{BV}([a,b])$, 试证明

$$\bigvee_a^b fg\le \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\bigvee_a^b g+\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\bigvee_a^b f$$

Proof 记 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|=M_1$ 和 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|=M_2$. 对 $[a,b]$ 的任一分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})|\\
\le\ &\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_i)|+\sum_{i=1}^{n}|f(x_{i-1})g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})|\\
\le\ &\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|M_2+\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})|M_1\\
\le\ &M_2\bigvee_a^b f+M_1\bigvee_a^b g
\end{aligned}$$

所求证的式子成立. 本题说明了当 f,g 都是有界变差时, fg 也是.

6. 设 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$, $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上属于 Lip1. 试证明 $\varphi(f)\in\mathrm{BV}([a,b])$.

Proof $\varphi(x)\in\mathrm{Lip}\alpha$ 是指对于任意的 x',x'', 都有 $|\varphi(x')-\varphi(x'')|\le L^{\alpha}|x'-x''|$. 对 $[a,b]$ 的任一分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,

$$\sum_{i=1}^{n}|\varphi(f(x_i))-\varphi(f(x_{i-1}))|\le\sum_{i=1}^{n}L|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le L\bigvee_a^b f$$

所以 $\varphi(f)$ 在 $[a,b]$ 上是有界变差的.

7. 设 $f\in\mathrm{Lip1}([a,b])$, 试证明 $\bigvee\limits_a^x f$ 也是.

Proof 对于任意的 $x_1,x_2\in[a,b],x_1<x_2$. 任取分划 $x_1=y_0<y_1<\cdots<y_n=x_2$,

$$\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(y_{i-1})|\le L\sum_{i=1}^{n}|y_i-y_{i-1}|=L(x_2-x_1),$$

所以

$$\bigvee_{x_1}^{x_2}f\le L|x_2-x_1|,$$

左边正是 $\bigvee\limits_a^{x_2}f-\bigvee\limits_a^{x_1}f$.

8. 试证明 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$ 当且仅当存在 $[a,b]$ 上的递增函数 $F(x)$ 使得

$$|f(x')-f(x'')|\le F(x'')-F(x')\quad(a\le x'<x''\le b)$$

Proof 仅当: 令 $F(x)=\bigvee_a^x f$ 即可.

当: 对 $[a,b]$ 的任一分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le\sum_{i=1}^{n}(F(x_i)-f(x_{i-1}))=F(b)-F(a)$$

所以 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$.

9. 设 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数, 试问 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数吗?

Proof $f(x)$ 一定连续. 因为 $f(x)$ 有界变差, 所以它有界. 但是有界变差函数可以表成两个单调函数的差, 因此它在区间的任何点处有单侧的极限存在. 因此 $f(x)$ 的间断点只能是有跃度的, 但是这是不可能的, 因为 $f(x)$ 是某个函数的导数.

10. 设 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$, 试证明

$$\int_a^b |f'(x)|dx \le \bigvee_a^b f.$$

Proof 设 $F(x) = \bigvee_a^x f$, 那么 $F(x)$ 是单调上升的, $F(x)$ 几乎处处可微, 且 $F'(x) = |f'(x)|$ (p. 241 例 4), 所以根据 Lebesgue 定理, $\int_a^b |f'(x)|dx = \int_a^b F'(x)dx \le F(b) - F(a) = \bigvee_a^b f$.

11. 设 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$, 若有

$$\bigvee_a^b f = f(b) - f(a)$$

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增.

Proof 根据题意 $f(b) \ge f(a)$. 对应于分划 $a < x < b$ 的变差 $|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \le f(b) - f(a)$. 又 $|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \ge |f(b) - f(a)|$, 所以

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| = f(b) - f(a).$$

如果 $f(x) < f(a)$, 那么 $f(x) < f(b)$ 也成立, 上式成为 $f(a) - f(x) + f(b) - f(x) = f(b) - f(a)$ 得到 $f(a) = f(x)$ 与假设矛盾. 类似的从 $f(x) > f(b)$ 也可以得到矛盾. 所以 $f(x) \ge f(a)$ 和 $f(b) \ge f(x)$ 对任意的 $x \in (a,b)$ 成立.

任取 $x_1 < x_2$, 一个类似的讨论说明对应于分划 $a < x_1 < x_2 < b$ 的变差

$$|f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + |f(b) - f(x_2)| = f(b) - f(a).$$

根据前面的讨论结果, 一些绝对值符号可以脱去, 从而得到

$$|f(x_2) - f(x_1)| = f(x_2) - f(x_1)$$

这说明 $f(x_2) \ge f(x_1)$.

这两条说明了 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是递增的.

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 (a,b) 内 $f'(x) = 0$ 的点可以排列为

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b,$$

试计算 $\bigvee\limits_a^b f$.

Solution 因为导数是具有界值性的, 所以这些点把 $[a,b]$ 分为 $n+1$ 个小区间, 每个小区间上导数是不改变符号的, 因此 f 在这些小区间上分别是单调的. 因此, (补充定义 $x_0 = a$ 和 $x_{n+1} = b$)

$$\bigvee_a^b f = \sum_{i=1}^{n+1} \bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^{n+1} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

§5.3, 不定积分的微分, 思考题, page 256

1. 设 $E \subset [0,1]$, 若存在 $l : 0 < l < 1$, 使得对 $[0,1]$ 中任意的子区间 $[a,b]$ 都有

$$m(E \cap [a,b]) \ge l(b-a),$$

试证明 $m(E) = 1$.

Proof 我们要证明 $\chi_E(x) = 1$ a.e. 考虑函数 $F_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \chi_E(x)dt, (a \le x < b)$, 依已知条件, $F_h(x) \ge l$, 因此 $\chi_E(x) = \lim\limits_{h \to 0} F_h(x) \ge l$ a.e., 因为 $0 < l < 1$, 所以 $\chi_E(x) = 1$ a.e..

2. 对于 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数 $\chi_Q(x)$, 试问 $[0,1]$ 中的 Lebesgue 点是什么?

Solution 当 x 是无理数时, $|f(x+t)-f(x)|=0$ a.e. $t\in(-h,h)$, 此时 x 是 Lebesgue 点. 当 x 为有理数时, $|f(x+t)-f(x)|=1$ a.e. $t\in(-h,h)$, 因此 x 不是 Lebesgue 点. 所以我们得到结论, $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数的 Lebesgue 点是 $[0,1]$ 上的全体无理数.

3. 设 $f\in L([a,b])$, 且令
$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b],$$
试证明
$$\bigvee_a^b F\le\int_a^b |F'(x)|dx$$

Proof $|F'(x)|=|f(x)|$ a.e. $x\in[a,b]$, $\int_a^b|F'(x)|dx=\int_a^b|f(x)|dx$. 对于 $[a,b]$ 的任一分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, F 的变差
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n|F(x_i)-F(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)dt\right|\\ &\le \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(t)|dt\\ &= \int_a^b|f(t)|dt=\int_a^b|F'(x)|dx\end{aligned}$$
结论立即可得. 事实上, 我们有 $\bigvee_a^b F=\int_a^b|F'(x)|dx$, 参见习题五第二组的第 8 题.

§5.4, 绝对连续函数和微积分基本定理, 思考题, page 265

1. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续, 且有
$$|f'(x)|\le M,\ \text{a.e. } x\in[a,b],$$
则 $|f(y)-f(x)|\le M|x-y|$, a.e. $x\in[a,b]$.

Proof $f\in\mathrm{AC}([a,b])$ 说明在 $x<y$ 时,
$$|f(y)-f(x)|=\left|\int_x^y f'(t)dt\right|\le\int_x^y|f'(t)|dt\le\int_x^y Mdt=M(y-x).$$

2. 设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上, 若有
$$|f(y)-f(x)|\le M|y-x|,\quad x,y\in[a,b],$$
则 $|f'(x)|\le M$, a.e. $x\in[a,b]$.

Proof 因为 $f(x)$ 是 Lipschitz 连续的, 所以 $f(x)$ 绝对连续, 它几乎处处可导. 在有导数的点 x_0,
$$|f'(x_0)|=\lim_{h\to0}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|}\le\lim_{h\to0}\frac{M|h|}{|h|}=M$$

3. 设 $f_n(x)(n=1,2,\dots)$ 是 $[a,b]$ 上的递增的绝对连续函数列. 若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 则其和函数在 $[a,b]$ 上绝对连续.

Proof 记 $F(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_n(x)$, 根据 Fibini 逐项微分定理, $F'(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}f'_n(x)$, a.e. . 根据 $f_n(x)$ 的绝对连续性, $f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f'_n(x)dx$, 这里 $f'_n(x)\ge0$ a.e., 所以求和与求极限可以交换
$$\begin{aligned}F(x) &= \sum_{i=1}^{\infty}f_n(a)+\int_a^x f'_n(x)dx\\ &= F(a)+\int_a^x\sum_{i=1}^{\infty}f'_n(x)dx\\ &= F(a)+\int_a^x F'(x)dx\end{aligned}$$

因此 $F(x)$ 绝对连续.

4. 设 $f \in \mathrm{BV}([0,1])$. 若对任给 $\varepsilon > 0$, $f(x)$ 在 $[\varepsilon, 1]$ 上绝对连续, 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对连续.

Proof 因为 f 有界变差, 所以 f' 在 $[0,1]$ 上可积. 根据积分的绝对连续性, 我们有

$$\int_0^1 f'(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 f'(x)dx.$$

因为 f 在 $[\varepsilon, 1]$ 上绝对连续, 所以

$$\int_\varepsilon^1 f'(x)dx = f(1) - f(\varepsilon)$$

因此 (利用连续性)

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0),$$

说明 f 在 $[0,1]$ 上绝对连续.

An alternative proof 利用习题五第一组题 6 的证明, 因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处右连续, 所以对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $\bigvee_0^\delta f < \varepsilon/2$.

对于前面选好的 ε 和 δ. 因为 $f(x)$ 在 $[\delta, 1]$ 上绝对连续, 所以只要互不相交的区间 (x_i, y_i) 的总长不超过 $\delta' > 0$ 就有 $\sum_i |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon/2$.

回到 $[0,1]$ 这个区间. 在绝对连续的定义中, 那些区间 (x_i, y_i) (总和小于 δ') 可以分为三类: (1) $y_i \geq \delta$; (2) $x_i \leq \delta$; (3) $\delta \in (x_i, y_i)$. 因为这些区间是互不相交的, 所以第三类区间至多一个, 如果有的话, 把它拆成 (x_i, δ) 和 (δ, y_i) 这不影响总长度, 而且 $\sum_i |f(y_i) - f(x_i)|$ 不会下降. 这样我们只有属于前两类的区间. 对于第一类的区间, 对应的和数 $\sum_{i'} |f(y_{i'}) - f(x_{i'})| \leq \bigvee_a^\delta < \varepsilon/2$; 对于第二类的区间, 总和小于 δ', 所以根据 $[\delta, 1]$ 上的绝对连续性, $\sum_{i''} |f(y_{i''}) - f(x_{i''})| < \varepsilon/2$. 这样原来的所有区间对应的和数 $\sum_i |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$. 说明 f 在 $[0,1]$ 上绝对连续.

5. 设 $f \in \mathrm{AC}([0,1])$, 则存在 $f_i \in \mathrm{AC}([0,1])(i = 1,2)$ 且递增, 使得 $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

Proof 令 $f_1(x) = \frac{1}{2}(\bigvee_a^x(f) + f(x))$ 和 $f_2(x) = \frac{1}{2}(\bigvee_a^x(f) - f(x))$, 则 (参考定理 5.5, Jordan 分解) $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是递增的且 $f = f_1 - f_2$. 下面只要证明 f_1, f_2 绝对连续, 这只要证明 $\bigvee_a^x(f)$ 绝对连续. 任取 $a \leq \alpha < \beta \leq b$,

$$\bigvee_a^\beta f - \bigvee_a^\alpha f = \bigvee_\alpha^\beta f = \sup \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

这里上确界是对 $[\alpha, \beta]$ 的任意分划 $\alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta$ 取的. 在绝对连续的定义中, 把上式用于各个 (α_i, β_i) 就可以得到 (再次注意 f 的绝对连续性)

$$\sum_{i=1}^n (\bigvee_a^{\beta_i} f - \bigvee_a^{\alpha_i} f) \leq \varepsilon$$

说明 $\bigvee_a^x(f)$ 绝对连续.

注: 对于 $[a,b]$ 的任意一个分划 $\pi[a,b] = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, 作

$$\begin{aligned} p_\pi(f) &= \sum_{i=1}^n \max\{f(x_i) - f(x_{i-1}), 0\} \\ n_\pi(f) &= \sum_{i=1}^n \max\{f(x_{i-1}) - f(x_i), 0\} \end{aligned}$$

则 $p_\pi(f)-n_\pi(f)=f(b)-f(a)$ 和 $\Delta_\pi=p_\pi+n_\pi$. 在 $[a,b]$ 上作函数 $f_1(x)=\sup\limits_{\pi[a,x]} p_\pi(f)$ 和 $f_2(x)=\sup\limits_{\pi[a,x]} n_\pi(f)$, 则 f_1,f_2 单调上升且绝对连续. 我们有 $f(x)=(f_1(x)+f(a))-f_2(x)$ 且 $\bigvee_a^b f=f_1(b)-f(a)+f_2(b)$.

§5.5, 分部积分公式与积分中值公式, 思考题, page 269

1. 设 $f\in L([a,b])$, 令

$$g(x)=f(x)\int_a^x f(t)dt,$$

则

$$\int_a^b g(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2.$$

Proof 设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 则 $F'(x)=f(x)$ a.e. 和 $g(x)=F'(x)F(x)$ a.e. 两边积分并应用分部积分公式,

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)dx &= \int_a^b F'(x)F(x)dx\\ &= F(x)^2|_a^b-\int_a^b F'(x)F(x)dx\\ &= \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2-\int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

结论立即可得.

2. 设 $f(x),g(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上的可测函数, 且有

$$|f(x)|\le M,\quad |xg(x)|\le M,\quad 1\le x<\infty,$$

则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)g(t)dt=0.$$

Proof

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x}\int_1^x f(t)g(t)dt\right|\le\left|\frac{1}{x}\int_1^x f(t)g(t)dt\right| &\le \frac{1}{x}\int_1^x M|g(t)|dt\\ &\le \frac{M}{x}\int_1^x \frac{M}{t}dt\\ &= \frac{M^2\ln x}{x}\to 0,\quad x\to\infty.\end{aligned}$$

3. 设 $g\in L^1(\mathbb{R})$, 则存在 C, 使得对 $C^{(2)}(\mathbb{R})$ 中满足 $f(x)=0(x\notin(a,b))$ 的任意 $f(x)$ 均有

$$\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)f^2(x)dx\right|\le C\int_{\mathbb{R}}(f^2(x)+(f'(x))^2)dx.$$

Proof 设 $G(x)=\int_a^x g(t)dt$, 那么 G 在 $[a,b]$ 上有界, 设为 M.

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)f^2(x)dx\right| &= \left|\int_a^b g(x)f^2(x)dx\right|\\ (\text{分部积分}) &= \left|f^2(b)G(b)-f^2(a)G(a)-\int_a^b 2G(x)f(x)f'(x)dx\right|\\ &\le M\int_a^b 2|f(x)f'(x)|dx\\ (\text{AM-GM 不等式}) &\le M\int_{\mathbb{R}}(f^2(x)+(f'(x))^2)dx.\end{aligned}$$

习题五**, page 276**

第一组

1. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 中一族 (开, 闭与半开闭) 区间的并集, 试证明 E 是可测集.

Proof 对于任意的 $x \in E$, 因为 E 是一系列区间的并, 所以可以找到一系列长度趋于 0 的区间盖住 x 这个点, 这样所有的区间构成了 E 的一个 Vitali 覆盖. 根据 Vitali 覆盖定理的等价结论 (p.244 思考题 4), 存在可列个 $\{I_j\}$ 使得 $m(E \setminus \bigcup\limits_j I_j) = 0$, 因为 $I_j \subset E (j = 1, 2, \dots)$, 所以 E 是一个零测集和一系列的可列个区间的并, E 是可测的.

2. 设 $\{x_n\} \subset [a, b]$, 试作 $[a, b]$ 上的递增函数, 其不连续点恰为 $\{x_n\}$.

Proof 对于 x_k 作

$$f_k(x) = \begin{cases} 2^{-k}, & x \geq x_k; \\ 0, & x < x_k. \end{cases}$$

令 $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, 则 $F(x)$ 处处收敛, $F(x)$ 递增, 且 $F(x)$ 的不连续点恰为 $\{x_n\}$.

3. 设 $f(x)$ 是 (a, b) 上的递增函数, $E \subset (a, b)$. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $(a_i, b_i) \subset (a, b) (i = 1, 2, \dots)$, 使得

$$\bigcup_i (a_i, b_i) \supset E, \quad \sum_i (f(b_i) - f(a_i)) < \varepsilon,$$

试证明 $f'(x) = 0$, a.e. $x \in E$.

Proof 对于每个 (a_i, b_i), f 在上面递增, 根据 Lebesgue 定理,

$$\int_{a_i}^{b_i} f'(x) dx \leq f(b_i) - f(a_i).$$

所以

$$\int_E f'(x) dx \leq \int_{\cup_i (a_i, b_i)} f'(x) dx \leq \sum \int_{a_i}^{b_i} f'(x) dx \leq \sum_i (f(b_i) - f(a_i)) < \varepsilon.$$

根据 ε 的任意性, 我们有 $\int_E f'(x) dx = 0$. 而 $f'(x) \geq 0$ a.e. 所以 $f'(x) = 0$, a.e. $x \in E$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上是有界变差函数, 试证明函数

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad F(0) = 0$$

是 $[0, a]$ 上的有界变差函数.

Proof Suppose $f(x)$ is increasing first. For $x_1 < x_2$, we have

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \frac{1}{x_2} \int_0^{x_2} f(t) dt - \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{x_2} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt + \frac{1}{x_2} \int_0^{x_1} f(t) dt - \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} f(t) dt \\ &\geq \frac{1}{x_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x_1) dt - \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \int_0^{x_1} f(t) dt \\ &= \frac{x_2 - x_1}{x_2 x_1} \int_0^{x_1} f(x_1) dt - \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \int_0^{x_1} f(t) dt \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

$F(x)$ 是递增的, 所以它是有界变差的.

一般的, 设 $f = f_1 - f_2$ (f_1, f_2 are both increasing), 那么 $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f_1 dt - \frac{1}{x} \int_0^x f_2 dt$, 这两个变上限积分函数, 按照前面的讨论, 都是有界变差的, 所以 $F(x)$ 也是.

5. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数列, 且有

$$\bigvee_a^b f_k \le M \quad (k=1,2,\dots)$$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad x\in[a,b]$$

试证明 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$ 且满足 $\bigvee_a^b f \le M$.

Proof 对于 $[a,b]$ 的任意一个分划 $\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$,

$$\begin{aligned}
\Delta_\pi(f) &= \sum_{i=1}^m |f(x_i)-f(x_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^m |\lim_{n\to\infty} f_n(x_i) - \lim_{n\to\infty} f(x_{i-1})| \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^m |f_n(x_i)-f_n(x_{i-1})| \\
&\le \limsup_{n\to\infty} \bigvee_a^b f_n \le M
\end{aligned}$$

所以 f 在 $[a,b]$ 上有界变差且全变差不超过 M.

6. 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$, 且点 $x_0\in[a,b]$ 是 $f(x)$ 的连续点, 试证明 $\bigvee_a^x f$ 在点 x_0 处连续.

Proof 我们先证明 $\bigvee_a^x f$ 在点 x_0 处右连续如果 $x_0\in[a,b)$. 对任意的 $\varepsilon>0$, 作 $[x_0,b]$ 的分划 $x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})| > \bigvee_{x_0}^b f - \frac{\varepsilon}{2},$$

且因为 x_0 是 f 的连续点, 还可以使得 $|f(x_1)-f(x_0)|\le \frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}
\bigvee_{x_1}^b f &\ge \sum_{i=2}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})| - |f(x_1)-f(x_0)| \\
&\ge \bigvee_{x_0}^b f - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \bigvee_{x_0}^b f - \varepsilon
\end{aligned}$$

所以

$$0 \le \bigvee_a^{x_1} f - \bigvee_a^{x_0} f = \bigvee_{x_0}^{x_1} f = \bigvee_{x_0}^b f - \bigvee_{x_1}^b f \le \varepsilon$$

令 $\delta = x_1 - x_0 > 0$. 由于 $\bigvee_a^x f$ 单调增, 所以 $0<x-x_0<\delta$ 时,

$$0 \le \bigvee_a^x f - \bigvee_a^{x_0} f \le \bigvee_a^x f - \bigvee_a^{x_0} f \le \varepsilon$$

因此 $\bigvee_a^x f$ 在 x_0 处右连续 $(x_0<b)$. 一个类似的讨论给出 $\bigvee_a^x f$ 在 x_0 处左连续 $(x_0>a)$. 于是问题获证.

注: 本题的逆命题也是对的. 如果 $\bigvee_a^x f$ 在 x_0 处连续, 那么 $\lim\limits_{x\to x_0} \bigvee_x^{x_0} f = 0$, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| \le \lim\limits_{x\to x_0} \bigvee_x^{x_0} f = 0$, f 在 $x=x_0$ 处连续.

7. 设函数 $f:[a,b]\to[c,d]$ 是连续函数, 且对任意的 $y\in[c,d]$, 点集 $f^{-1}(\{y\})$ 至多有 10 个点, 试证明

$$\bigvee_a^b f\le 10(d-c).$$

Proof 作 $[a,b]$ 的一个分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 注意到 $f([x_{i-1},x_i])$ 是一个区间, 把它记作 $[y_{i-1},y_i]$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})| &\le \sum_{i=1}^n|y_i-y_{i-1}|\\ &= \int_c^d \chi_{[y_{i-1},y_i]}(y)dy\\ &= \int_c^d\sum_{i=1}^n\chi_{[y_{i-1},y_i]}(y)dy\\ &\le \int_c^d 10dy=10(d-c).\end{aligned}$$

最后一个不等式是因为 $[y_{i-1},y_i]$ 上的点 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 中多能取到.

8. 设 $f\in L([0,1])$, $g(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的单调上升函数, 若对任意的 $[a,b]\subset[0,1]$, 有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|^2\le(g(b)-g(a))(b-a),$$

试证明 $f^2(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可积函数.

Proof 特别取 $[a,b]$ 为 $[a,a+h]$, 那么可以得到

$$\left(\frac{1}{h}\int_a^{a+h}f(x)dx\right)^2\le\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

当 $h\to0$ 时, 两边的极限都是几乎处处存在的. 左边是因为 $\int_a^x f(x)dx$ 有界变差 (参看 p.256 思考题 3), 右边是因为 g 单调上升 (Lebesgue 定理). 这样, 我们有 $f^2(x)\le g'(x)$ a.e. $x\in[0,1]$. 因为 $g'(x)$ 可积 (Lebesgue 定理), 所以 $f^2(x)$ 可积.

9. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负绝对连续函数, 试证明 $f^p(x)(p>1)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

Proof 设 $|f(x)|\le M, x\in[a,b]$. 考察函数 $g(x)=x^p$. 根据 Lagrange 中值定理, $|g(x_1)-g(x_2)|=|g'(\xi)||x_1-x_2|=p|\xi|^{p-1}|x_1-x_2|\le pM^{p-1}|x_1-x_2|$, 所以 g 是 Lipschitz 的, 根据第 19 题, $g(f)$ 绝对连续.

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增, 且有

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$$

试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

Proof 因为 f 单调增, 所以对于任意的 $[c,d]\subset[a,b]$ 都有 $\int_c^d f'(x)dx\le f(d)-f(c)$ (Lebesgue 定理). 而

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx=\int_a^x f'(t)dt+\int_x^b f'(t)dt\le f(x)-f(a)+f(b)-f(x)$$

说明 $\int_a^x f'(t)dx\le f(x)-f(a)$ 和 $\int_x^b f'(t)dx\le f(b)-f(x)$ 的等号都要取到, 于是 $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$ 对于 $x\in[a,b]$ 都成立, 所以 $f(x)$ 绝对连续.

11. 设 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$. 若有

$$\int_a^b |f'(x)|dx = \bigvee_a^b f,$$

试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

Proof 设 $F(x) = \bigvee_a^x f - \int_a^x |f'(t)|dt$, 对于任意的 $x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2$, 有

$$F(x_2) - F(x_1) = \bigvee_{x_2}^{x_1} f - \int_{x_1}^{x_2} |f'(t)|dt \geq 0$$

(参见 p.251 思考题 10), 知 $F(x)$ 单调上升, 但是 $F(a) = F(b) = 0$, 所以 $F(x) = 0$ 在 $[a,b]$ 上. 所以 $\bigvee_a^x f = \int_a^x |f'(t)|dt$ 处处成立, 后者绝对连续, 前者也是. 于是根据定义, $\sum\limits_i |x_{i+1} - x_i| < \delta$ 意味着

$$\sum_{i=1}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \sum_{i=1}^n \bigvee_{x_i}^{x_{i+1}} f \leq \sum_{i=1}^n (\bigvee_a^{x_{i+1}} f - \bigvee_a^{x_i} f) < \varepsilon$$

就可知 $f(x)$ 绝对连续.

12. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界递增函数, 且 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 记

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = B,$$

试证明

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)dx = B - A.$$

Proof 因为 f 单调, 所以根据 Lebesgue 定理, $\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a) \leq B - A$ 对任何 $[a,b]$ 成立, 又因为 $f'(x) \geq 0$ a.e. , 所以 $\int_{\mathbb{R}} f'(x)dx \leq B - A$ 也成立. $f' \in L(\mathbb{R})$. 事实上, f' 处处存在又 f' 在 $[a,b]$ 上可积就说明了 Newton-Leibniz 公式成立 (p.272 例 1), 即 $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$. 我们还有

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_{[-n,n]} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} (f(n) - f(-n)) = B - A.$$

13. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数, 且 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的可积函数, 试证明

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)dx = 0$$

Proof 因为 $f'(x)$ 处处存在且它可积, 所以 Newton-Leibniz 公式成立 (p.272 例 1),

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

因为 f' 可积, 所以 $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f'(t)dt = \int_a^\infty f'(t)dt$ 和 $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^b f'(t)dt = \int_{-\infty}^b f'(t)dt$ 都存在. 于是知 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 都存在, 又 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 所以这两个极限都必须是 0. 因此

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_{[-n,n]} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} (f(n) - f(-n)) = 0.$$

14. 假设 $f(x,y)$ 是定义在 $[a,b] \times [c,d]$ 上的二元函数, 且存在 $y_0 \in (c,d)$, 使得 $f(x,y_0)$ 在 $[a,b]$ 上是可积的; 又对于每一个 $x \in [a,b]$, $f(x,y)$ 是对 y 在 $[c,d]$ 上的绝对连续函数, $f'_y(x,y)$ 在 $[a,b] \times [c,d]$ 上可积, 试证明函数

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

是定义在 $[c,d]$ 上的绝对连续函数, 且对于几乎处处的 $y \in [c,d]$ 有

$$F'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Proof 因为 $f(x,y)$ 对 y 绝对连续, 所以

$$f(x,y)-f(x,y_0)=\int_{y_0}^{y} f'_y(x,y)dy$$

把上式对 x 在 $[a,b]$ 上积分, (因为 $f'_y(x,y)\in L([a,b]\times[c,d])$ 所以可以应用 Fubini 定理) 就得到

$$F(y)-F(y_0)=\int_{y_0}^{y}\left(\int_a^b f'_y(x,y)dx\right)dy.$$

所以 $F(y)$ 绝对连续, 且对几乎处处的 y 有 $F'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx$.

15. 设 $f(x)$ 在任一区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上都绝对连续, 试证明对每个 $y\in\mathbb{R}$, 有

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x+y)dx=\int_a^b \frac{d}{dy}f(x+y)dx.$$

Proof 因为 $f(x)$ 在 $[a+y,b+y]$ 上连续, 所以成立

$$\frac{d}{dy}\int_{a+y}^{b+y} f(x)dx=f(b+y)-f(a+y).$$

一个直接的计算表明, 如果 $f(x)$ 在 $x+y$ 处可微, 那么在 x 处, $\frac{d}{dy}f(x+y)=f'(x+y)$. 作 $g(x)=f(x+y)$ 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 绝对连续且 $g'(x)=f'(x+y)$. 所以

$$f(b+y)-f(a+y)=g(b)-g(a)=\int_a^b g'(x)dx=\int_a^b f'(x+y)dx.$$

16. 试举例说明绝对连续函数是几乎处处可微的这个结论一般是不能改进的.

Solution 这个例子和 p.241 的例 4 是相同的, 我们只要阐明例子中的 $f(x)$ 是绝对连续的即可. 这只要注意到 $f(x)$ 可以写成

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} m([a,x]\cap G_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x \chi_{G_n}(t)dt=\int_a^x\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{G_n}(t)dt.$$

这里积分号和求和号交换的合法性是因为 $\chi_{G_n}(t)$ 总是非负的. 按照 f 的做法, $f(x)$ 单调上升且 $f(b)$ 存在, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\chi_{G_n}(t)dt$ 是 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积的函数, 于是 $f(x)$ 绝对连续 (根据积分的绝对连续性).

17. 设 $g_k(x)$ 是在 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 又有 $|g'_k(x)|\le F(x)$ a.e. $(k=1,2,\dots)$ 且 $F\in L([a,b])$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x)=g(x)(a\le x\le b)$, $\lim\limits_{k\to\infty} g'_k(x)=f(x)$ a.e. $x\in[a,b]$, 试证明

$$g'(x)=f(x) \text{ a.e. } x\in[a,b].$$

Proof 因为 $g_k(x)$ 绝对连续, 所以

$$g_k(x)=g_k(a)+\int_a^x g'_k(t)dt.$$

令 $k\to\infty$, 并应用 Lebesgue 控制收敛定理, 就得到

$$g(x)=g(a)+\int_a^x f(t)dt.$$

所以 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续, 进而处处存在导数, 且 $g'(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$.

18. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续严格递增函数, $g(y)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 上绝对连续, 试证明 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

Proof 根据 $g(x)$ 的绝对连续性, 任给 $\varepsilon>0$, 只要互不相交的区间 $(c_i,d_i)\subset[f(a),f(b)]$ 总长度小于某一个固定的 $\delta'>0$, 就有 $\sum\limits_i |g(d_i)-g(c_i)|<\varepsilon$.

对于这个 δ', 根据 $f(x)$ 的绝对连续性, 只要互不相交的区间 (a_i,b_i) 总长度小于某一个固定的 $\delta>0$, 就有 $\sum\limits_i f(b_i)-f(a_i)<\delta'$. 因为 f 严格单调上升, 所以 $(f(a_i),f(b_i))$ 是 $[f(a),f(b)]$ 上的一系列互不相交的区间且总长度小于 δ', 根据 g 的绝对连续性就知道 $\sum\limits_i |g(f(b_i))-g(f(a_i))|<\varepsilon$.

这就说明了 $g(f(x))$ 的绝对连续性.

19. 设 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足 Lipschitz 条件, 试证明 $f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

Proof 设 f 的 Lipschitz 常数是 L. 对于任给的 $\varepsilon>0$, 由 g 的绝对连续性, 只要互不相交的区间 (x_i,y_i) 总长度小于某一个固定的 $\delta>0$, 就有 $\sum\limits_i |g(y_i)-g(x_i)|<\varepsilon/L$. 所以 $\sum\limits_i |f(g(y_i))-f(g(x_i))|< L\sum\limits_i |g(y_i)-g(x_i)|<\varepsilon$. 这就说明了 $f(g(x))$ 的绝对连续性.

20. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微. 若 $f'(x)=0$ a.e. $x\in[a,b]$, 试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一个常数 (函数).

Proof $f'\in L([a,b])$ 且 $f'(x)$ 处处存在. 根据 p.272 例 1, f 绝对连续. 再应用定理 5.13 (p.259) 就知 f 是常数 (函数).

第二组

1. 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b]), f_n\in \mathrm{BV}([a,b]) (n=1,2,\dots)$, 且有

$$\lim_{n\to\infty}\bigvee_a^b(f-f_n)=0,$$

试证明存在 $\{f_{n_i}(x)\}$ 使得

$$\lim_{i\to\infty} f'_{n_i}(x)=f'(x),\ \text{a.e. } x\in[a,b].$$

Proof 根据题意, 可以取子列 $\{f_{n_i}\}(x)$ 满足 $\bigvee_a^b(f-f_{n_i})\le\frac{1}{2^n}$, 这样 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\bigvee_a^b(f-f_{n_i})$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\bigvee_a^x(f-f_{n_i})(x\in[a,b])$ 更收敛, 根据 Fubini 逐项微分定理, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\bigvee_a^x(f-f_{n_i})$ 几乎处处收敛. 在那些收敛的点上, $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{d}{dx}\bigvee_a^x(f-f_{n_i})=0$, 根据 p249 例 4, 得到 $\lim\limits_{i\to\infty}|f'-f'_{n_i}|=0$ a.e. . 问题获证.

2. 设 $g_n\in \mathrm{BV}([a,b]) (n=1,2,\dots)$, $\{g_n(a)\}$ 是 Cauchy 列, 且有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\bigvee_a^b(g_n-g_m)=0,$$

试证明存在 $g\in \mathrm{BV}([a,b])$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\bigvee_a^b(g_n-g)=0.$$

Proof 我们证明 $\{g_n(x)\}$ 也都是 Cauchy 列, 这样 $\{g_n(x)\}$ 处处收敛到 $g(x)$. 对于任给的 $\varepsilon>0$, n,m 充分大后 $\bigvee_a^b(g_n-g_m)<\varepsilon/2$ 和 $|g_n(a)-g_m(a)|<\varepsilon/2$ 都成立.

$$\begin{aligned}
|g_m(x)-g_n(x)| &\le |g_m(x)-g_n(x)-(g_m(a)-g_m(a))|+|g_m(a)-g_n(a)|\\
&\le \bigvee_a^x(g_m-g_n)+|g_m(a)-g_n(a)|\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

这说明 $\{g_n(x)\}$ 是 Cauchy 列. 根据第一组第 5 题, $g \in \mathrm{BV}([a,b])$. 在 $\bigvee_a^b(g_n - g_m) < \varepsilon$ 中令 $m \to \infty$ 知 $\bigvee_a^b(g_n - g) < \varepsilon$.

3. 设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, 试证明函数 $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ 在 $[-1,1]$ 上是有界变差函数.

Proof 对于任一分划, 我们加入 0 点, 这样分划的和不会减小. 我们设分划为 $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = 1$, 这个分划的变差为

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{i+1}^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_i^k \right| + \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_{i+1}^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_i^k \right|$$

这显然不超过

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} |a_k||x_{i+1}^k - x_i^k| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} |a_k||y_{i+1}^k - y_i^k| \\
= & \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{i+1}^k - x_i^k| + \sum_{i=1}^{n} |y_{i+1}^k - y_i^k| \right) \\
= & \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| (|x_n^k - x_0^k| + |y_n^k - y_0^k|) \\
= & \ 2\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty
\end{aligned}$$

4. 若 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数, $g(x) \in \mathrm{BV}([0,1])$, 且 $R(g) \subset [0,1]$, 试问 $f(g(x))$ 在 $[0,1]$ 上有界变差吗?

Proof 不一定. 比如取 $f(x) = \sqrt{x}$, 定义 $g(0) = 0$ 和 $g(x) = \dfrac{1}{n^2}, x \in \left[\dfrac{1}{n-1}, \dfrac{1}{n}\right]$. 容易看出, $\bigvee\limits_0^1 g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} < \infty$ 但是 $\bigvee\limits_0^1 f(g) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ 是发散的.

5. 设 $|f| \in \mathrm{BV}([a,b])$. 若 $f \in C([a,b])$, 试证明 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$ 且 $\bigvee_a^b f = \bigvee_a^b |f|$.

Proof 对于任意的分划 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,

当 $f(x_i)f(x_{i-1}) \geq 0$ 时, 都有 $|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq ||f(x_i)| - |f(x_{i-1})||$.

当 $f(x_i)f(x_{i-1}) < 0$ 时, 根据零点存在定理, 存在 $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ 使 $f(\xi) = 0$, 从而 $|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq ||f(x_i)| - |f(\xi)|| + ||f(\xi)| - |f(x_{i-1})||$.

于是就得到 $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \bigvee_a^b |f|$, 所以 $\bigvee_a^b f \leq \bigvee_a^b |f| < \infty$ 表明 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$. 根据 p.251 思考题 4 的证明, 在 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$ 时又有 $\bigvee_a^b |f| \leq \bigvee_a^b f$, 所以 $\bigvee_a^b f = \bigvee_a^b |f|$.

6. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界可测函数, $0 < \lambda < 1$. 若对任一的区间 $[a,b]$ 有

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right|^p \leq \lambda (b-a)^{p-1} \int_a^b |f(x)|^p dx \quad (p > 1),$$

试证明 $f(x) = 0$, a.e. $x \in \mathbb{R}$.

Proof 特别的, 取 $[a,b]$ 为 $[a, a+h]$, 则可以得到

$$\left| \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)dx \right|^p \leq \lambda \frac{1}{h} \int_a^{a+h} |f(x)|^p dx,$$

令 $h \to 0$, 两边的极限几乎处处同时存在, 所以两边极限都存在时, 有

$$|f(a)|^p \le \lambda |f(a)|^p,$$

所以 $f(a) = 0$, 这是对几乎处处的 $a \in \mathbb{R}$ 成立的.

7. 设 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$, 试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续当且仅当 $\bigvee_a^x f$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

Proof 当: 这只要注意到 $|f(\beta) - f(\alpha)| \le \bigvee_\alpha^\beta(f)$; 仅当: 在 p.265 思考题 5 中已证.

注: 题中 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$ 这个条件可以略去.

8. 设 $f \in L([a,b])$, 令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 试证明

$$\bigvee_a^b F = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Proof 根据 p.256 思考题 3 的证明, 成立着 $\bigvee_a^b F \le \int_a^b |f(x)|dx$. 下面证明逆向的不等式. 对于 $[a,b]$ 上的任意一个分划, 作一个与之对应的阶梯函数 $S(x)$, 每一小段上取值限制在 $\{-1, 0, 1\}$. 于是

$$\int_a^b S(t)f(t)dt \le \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \right| = \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| \le \bigvee_a^b F.$$

根据推论 4.22, 存在阶梯函数列 $\varphi_k(x) \to f(x)$ a.e. . 同时作阶梯函数

$$S_k(x) = \begin{cases} 1, & \varphi_k(x) > 0; \\ 0, & \varphi_k(x) = 0; \\ -1, & \varphi_k(x) < 0. \end{cases}$$

则 $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(x)f(x) = |f(x)|$, a.e. . 根据 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\int_a^b |f(x)|dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b S_k(x)f(x)dx \le \bigvee_a^b F.$$

最后的一个不等式是因为 $\int_a^b S_k(x)f(x)dx \le \bigvee_a^b F$ 总成立.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义, 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $[a,b]$ 中有限个互不相交的区间 $[x_i, y_i] (i = 1, 2, \ldots, n)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta$ 时, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n (f(y_i) - f(x_i)) \right| < \varepsilon,$$

试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

Proof 对于一个给定的 $\varepsilon > 0$, 按已知条件存在 $\delta > 0$ 配合 $\varepsilon/2$. 把这个 δ 作为绝对连续定义中的 δ. 对于一系列的开区间 (x_i, y_i), 和 $S = \sum\limits_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)|$ 可以被分成两部分 $S_1 + S_2$, S_1 对应了那些 $f(y_i) \ge f(x_i)$ 的和, S_2 对应那些 $f(y_i) < f(x_i)$ 的和. S_1 所对应的区间和 S_2 所对应的区间的总长度分别不超过 δ, 如果某个 S_i 中有两个区间作为闭区间相交了, 就是它们的端点重合了 (因为作为开区间时不相交), 那么合并这两个区间, 这不影响 S_i 这个和数和区间的总长度. 因此, 根据题意, $|S_1| < \varepsilon/2$, $|S_2| < \varepsilon/2$. 所以 $|S| = |S_1| + |S_2| < \varepsilon$, f 绝对连续.

10. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界可测函数, 且对于每一个 $t \in \mathbb{R}$ 有 $f(x) = f(x-t)$, a.e. $x \in \mathbb{R}$, 试证明存在常数 C, 使得

$$f(x) = C, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

Proof 因为 f 有界, 所以 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 总是存在的. 根据题意, 还有

$$F(x+y)=\int_0^{x+y} f(t)dt=\int_0^x f(t)dt+\int_x^{x+y} f(t)dt=F(x)+F(y),$$

这对任意的 x,y 都成立. 而且 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续 (根据积分的绝对连续性), 所以 $F(x)$ 处处连续, 因此 $F(x)=Cx$, 所以 $F'(x)=f(x)=C$ 几乎处处成立.

11. 假设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的单调上升函数, 试证明 f 可以分解为 $f(x)=g(x)+h(x)(x\in[a,b])$, 其中, $g(x)$ 单调上升而且绝对连续, $h(x)$ 单调上升且导数几乎处处为 0.

Proof 因为 f 单调增加, 所以 $f'\geq 0$ 且 f' 可积. 令 $g(x)=\int_a^x f'(x)dx$. 对于任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$, $g(x_2)-g(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f'(t)dt\geq 0$ 所以 $g(x)$ 单调上升. 根据定理 5.10 (p.258), $g(x)$ 绝对连续.

令 $h(x)=f(x)-g(x)$, 因为 $g'(x)=f(x)$ a.e. 所以 $h(x)=0$ a.e. $x\in[a,b]$. 下面证明 $h(x)$ 单调增加. 对于任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$, $h(x_2)-h(x_1)=f(x_2)-f(x_1)-\int_{x_1}^{x_2} f'(t)dt\geq 0$ (根据 Lebesgue 定理, 因为 f 单调上升).

12. 设 $\{f_n(x)\}$ 是支集含于 (a,b) 的连续可微函数列, 且满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx=0=\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n'(x)-F(x)|dx,$$

试证明 $F(x)=f'(x)$, a.e. $x\in[a,b]$, 其中 $f,F\in L([a,b])$.

Proof 依题意 $f_n(a)=0$. 设 $g(x)\in C^\infty((a,b))$ 且 $g(x)$ 的支集含于 (a,b). 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b f_n(x)g(x)dx &= \int_a^b g(x)\left(\int_a^x f_n'(t)dt\right)dx\\ &= \int_a^b f_n'(t)\left(\int_t^b g(x)dx\right)dt\end{aligned}$$

容易得到

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b\left(\int_a^x F(t)dt\right)\cdot g(x)dx$$

于是得到

$$f(x)=\int_a^x F(t)dt \text{ a.e. } x\in[a,b].$$

所以 $f'(x)=F(x)$, a.e. $x\in[a,b]$.

13. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差且连续的函数. 若对 $[a,b]$ 中任一零测集 Z, 有 $m(f(Z))=0$ (简称为 f 具有零测性), 试证明 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

Proof 对于任意的区间 $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$, 作 $A=\{x\in(\alpha,\beta):f'(x)\text{存在}\}$ 和 $B=(\alpha,\beta)\setminus A$. 因为 f 有界变差, 所以 f' 几乎处处存在且可积, $m(f(B))=m(B)=0$. 因为 f 连续, 所以

$$|f(\beta)-f(\alpha)|\leq m(f(\alpha,\beta))=m(f(A\cup B))=m(f(A)\cup f(B))\leq m(f(A)).$$

根据 p.271 的推论 5.21, $m(f(A))\leq\int_A |f'(x)|dx$. 综合上述讨论,

$$|f(\beta)-f(\alpha)|\leq\int_\alpha^\beta |f'(x)|dx$$

对一切 $a\leq\alpha<\beta\leq b$ 的 α,β 都成立. 再结合积分连续性和绝对连续的定义, 不难证明 f 是绝对连续在 $[a,b]$ 上的.

14. 设定义在 $[a,b]$ 上的实值函数 $f(x)$ 具有零测性, 试问 f^2 也有零测性吗? 又若 $f:[a,b]\to[0,\infty)$ 具有零测性, 试问 $\sqrt{f}$ 也具有零测性吗?

Proof 我们证明 f^2 具有零测性, 这只要证明对于任何 $\mathbb{R}$ 上的零测集 E, 都有 $E^2 := \{x^2 : x \in E\}$ 也是零测集, 为此只要证明 $E^2 \cap [-n, n]$ 对于每一个整数 n 都是零测集. 这容易由 $E^2 \cap [-n, n] = (E \cap [-\sqrt{N} \cap \sqrt{n}])^2$ 及映射 $x \mapsto x^2$ 在 $[-L, L]$ 上是 $(2L)$-Lipschitz 函数得到.

类似地可以证明 $\sqrt{f}$ 的零测性, 只要证明若 $E \subseteq [0, \infty)$ 是零测集, 则 $\sqrt{E} := \{\sqrt{x} : x \in E\}$ 也是零测集. 为此只要证明 $E \cap [\frac{1}{n}, \infty)$ 对于每个整数 n 都是零测集. 这可以利用映射 $x \mapsto \sqrt{x}$ 在 $[\epsilon, +\infty)$ 上是 $\frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}$-Lipschitz 函数得到.

15. 设 $f \in \mathrm{AC}([c, d]), g \in \mathrm{AC}([a, b]), g([a, b]) = [c, d]$. 若 $f(g) \in \mathrm{BV}([a, b])$, 试证明 $f(g) \in \mathrm{AC}([a, b])$.

Proof 已知满足推论 5.24(p.274), 所以 $f(g(t))' = f'(g(t))g'(t)$ a.e. $t \in [a, b]$ 成立. 又已知满足推论 5.26(p.275) 的 (iii) (因为 f(g) 有界变差), 所以定理 5.25(p.274) 的 (ii) 满足, 根据定理 5.25, $f(g)$ 在 $[a, b]$ 上绝对连续 (这是定理 5.25 的 (i)).

16. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的单调上升函数, 令 $E = \{x \in [a, b] : f'(x)\text{存在}\}$, 试证明

$$\int_a^b f'(x)dx = m^*(f(E)).$$

Proof 根据推论 5.21 (p.271), 并因为 $f'(x) \geq 0, x \in E$, 有 $m^*(f(E)) \leq \int_E f'(x)dx$. 下面我们证明逆向的不等式. 设一系列区间 $\{I_n\}$ 盖住 E 且满足 $\sum |I_n| < m^*(f(E)) + \varepsilon$. 因为 f 递增, 所以点集 $J_n = f^{-1}(I_n)$ 是一个区间. 这一系列的 $\{J_n\}$ 盖住 E. 对于每一个 J_n, 可以做两个数列 $a_{k,n}$ 和 $b_{k,n}$ 分别趋于 J_n 的下确界和上确界. 这样根据 Lebesgue 定理, 有

$$\int_{J_n} f'(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{a_{k,n}}^{b_{k,n}} f'(x)dx \leq \lim_{k\to\infty} (f(b_{k,n}) - f(a_{k,n})) = |I_n|.$$

因此

$$\int_E f'(x)dx \leq \int_{\bigcup J_n} f'(x)dx \leq \sum \int_{J_n} f'(x)dx \leq \sum |I_n| < m^*(f(E)) + \varepsilon.$$

根据 ε 的任意性, $\int_E f'(x)dx \leq m^*(f(E))$ 成立.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对连续, $f(0) = 0$, 试证明

$$\int_0^1 |f(x)f'(x)|dx \leq \int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

Proof 因为 $f(x)$ 绝对连续, 所以 $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x f'(t)dt$. 所以

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)f'(x)|dx &= \int_0^1 \left| f'(x) \int_0^x f'(t)dt \right| dx \\
&\leq \int_0^1 |f'(x)| \int_0^x |f'(t)|dtdx \\
&\leq \int_0^1 |f'(x)| \left(\int_0^1 |f'(t)|dt \right) dx \\
&= \left(\int_0^1 |f'(x)|dx \right)^2 \\
&\leq \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \quad \text{(Cauchy-Schwarz 不等式)}
\end{aligned}$$

18. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负实值可测函数, $\varphi(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上递增, 且在任一区间 $[0, a](a > 0)$ 上绝对连续, 又 $\varphi(0) = 0$, 令 $G_t = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > t\}, t > 0$. 试证明对 $\mathbb{R}$ 中任一可测集 E, 有

$$\int_E \varphi(f(x))dx = \int_0^\infty m(E \cap G_t)\varphi'(t)dt.$$

Proof 我们首先有 $\int_E \varphi(f(x))dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\varphi(f(x))dx$. 因为 $\varphi(x)$ 在 $[0,a]$ 上绝对连续, 因此成立着

$$\varphi(a) = \varphi(0) + \int_0^a \varphi'(x)dx = \int_0^a \varphi'(x)dx,$$

所以前式就是

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\left(\int_0^{f(x)} \varphi'(t)dt\right)dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\int_0^\infty \chi_{[0,f(x)]}(t)\varphi'(t)dtdx.$$

根据 Fubini 定理, 它又等于

$$\int_0^\infty \varphi'(t)\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\chi_{[0,f(x)]}(t)dxdt = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(t)\cdot m(E\cap G_t)dt$$

19. 设 $f\in L([0,1])$, 且

$$\int_0^1 x^n f(x)dx = \frac{1}{n+2} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

试证明 $f(x)=x$, a.e. $x\in[0,1]$.

Proof 容易证明 $\int_0^1 x^n(f(x)-x)dx = 0$ 对 $n=0,1,2\dots$ 都成立, 因此问题变为证明: 如果 $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$ 对 $n=0,1,2\dots$ 都成立, 则 $f(x)=0$, a.e. . (这其实是 p.266 的例, 我们下面用不同的方法证明它)

我们首先看到 $\int_0^1 f(x)p(x)dx = 0$ 对一切多项式 $p(x)$ 都成立; 再因为多项式可以一致的逼近连续函数, 所以 $\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$ 对一切连续函数 $g(x)$ 都成立. 根据 Luzin 定理和积分的绝对连续性, 我们不难证明 $\int_0^1 f(x)h(x)dx = 0$ 对一切的 $h\in L([0,1])$ 都成立. 特别的取

$$h(x) = \begin{cases} 1, & f(x)>0; \\ 0, & f(x)=0; \\ -1, & f(x)<0. \end{cases}$$

则 $h(x)$ 有界可测, 进而 $h(x)$ 可积, 且 $\int_0^1 f(x)h(x)dx = \int_0^1 |f(x)|dx = 0$, 所以 $f(x)=0$, a.e. $x\in[0,1]$.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有原函数, $g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数, 试证明 $f(x)g(x)$ 在 $[0,1]$ 上有原函数.

Proof 设 $F(x)$ 是 $f(t)$ 的一个原函数. 我们证明 $F(x)g(x) - \int_0^x f(t)g'(t)dt$ 是 $f(x)g(x)$ 的一个原函数. 这只要证明在 $g'(x)$ 存在时成立着 $\frac{d}{dx}\int_0^x F(t)g'(t)dt = F(x)g'(x)$. 根据 p.265 思考题 5, 我们只要就 $g(t)$ 为单调上升的函数进行讨论. 当 $g'(x)$ 存在的时候

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_0^x F(t)g'(t)dt &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)g'(t)dt \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{F(\xi)}{h}\int_x^{x+h} g'(t)dt \\ &= \lim_{h\to 0} F(\xi)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = F(x)g(x). \end{aligned}$$

21. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续下凸函数, 试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

Proof 因为 f 是连续的, 可设 f 在 $c\in[a,b]$ 处达到它的最小值. 若 $c>a$, 则 $\forall a\le x_1<x_2\le c$, 根据凸函数的性质,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2}$$

因为 f 在 c 处有最小值, 所以上面的不等式的左端 $\le$ 右端 ≤ 0, 所以 $f(x_2)\le f(x_1)$, 这意味着 f 在 $[a,c]$ 上是单调下降的, 因此是有界变差的. 一个类似的讨论指明 f 在 $[c,b]$ 上单调上升, 因此也是有界变差的, 所以 f 在 $[a,b]$ 上是有界变差的.

下面证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的内部的任一闭区间 $[c,d]\subset(a,b)$ 上绝对连续, 这只要证明 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上是 Lipschitz 的. 设 $|f(x)|\le M$ 在 $[a,b]$ 上. 设 $c\le x_1<x_2\le d<d+h=b$, 根据 f 的凸性, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2}\le\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

所以

$$f(x_2)-f(x_1)\le\frac{f(b+h)-f(b)}{h}(x_2-x_1)\le\frac{2M}{h}(x_2-x_1).$$

如果 $a=c-h'<c\le x_2<x_1\le d$, 类似的有

$$f(x_1)-f(x_2)\le\frac{2M}{h'}(x_1-x_2).$$

结合这两点知 f 在 $[c,d]\subset(a,b)$ 上是 Lipschitz 的, 从而绝对连续.

根据 p.265 思考题 4, 我们可以得出 $f\in\mathrm{AC}([a,b])$ 的结论.

22. 设 $f\in\mathrm{Lip}1(\mathbb{R})$ 证明存在 $M>0$, 对任意的可测集 $E\subset\mathbb{R}$, 均有

$$m(f(E))\le M\cdot m(E).$$

Proof It is trivial if $mE=\infty$. Now assume that $mE<\infty$ and suppose the Liptschitz coefficient is L. Since a Liptschitz function maps a set of measure zero to a set of measure zero, it is clear that $f(E)$ is measurable. For $\epsilon>0$, there is an open covering of E, say open intervals $\{I_k\}$, such that

$$\sum|I_k|\le m(E)+\epsilon.$$

Hence $f(E)\subseteq\bigcup f(I_k)$, and

$$m(f(E))\le L\sum|I_k|\le L(m(E)+\epsilon).$$

The conclusion follows from the arbitrariness of ϵ.

23. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处可微, 且 $f'(x)>0$, 试证明 $f^{-1}(x)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 上绝对连续.

Proof $f^{-1}(x)$ 连续, 单调 (因此有界变差), 处处可微, 根据 p.271 推论 5.21, f^{-1} 把零测集映成零测集, 根据本组习题 13, 知 f^{-1} 绝对连续.

24. 设 $f\in L(\mathbb{R})$. 若对任一满足 $m(G)=1$ 的开集, 总有 $\int_G f(x)dx=0$, 试证明 $f(x)=0$ a.e. $x\in\mathbb{R}$.

Proof 从 $\int_0^1 f(x)dx=\int_t^{t+1}f(x)dx=0$ 可得 $\int_0^t f(x)dx=\int_1^{t+1}f(x)dx=\int_0^t f(x+1)dx$. 两边对 t 求导就有 $f(x)=f(x+1)$ a.e. on $\mathbb{R}$. 令 $A=\{f>0\}\cap(0,1)$. 假设 $mA>0$, 则 $\int_A f=\alpha>0$. 令 $B=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(A+\{n\})$, 则 $\int_B f=\sum\int_{A+\{n\}}f=+\infty$, 与 $f\in L(\mathbb{R})$ 矛盾. 故 $mA=0$. 类似地可知 $m(\{f<0\}\cap(0,1))=0$, 即 $f=0$ 在 $(0,1)$ 上几乎处处成立, 进而在 $\mathbb{R}$ 上也是如此.

25. 设 $f\in R([c,d])$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且有 $g([a,b])\subset[c,d]$ 以及 $g'(x)>0(x\in[a,b])$ 试证明 $f(g)\in R([a,b])$.

Proof 设 f 在 $[c,d]$ 上的不连续点集为 Z. 因为 f 在 $[c,d]$ 上 Riemann 可积, 所以 $m(Z)=0$. 设 $E=\{x\in[a,b]:g(x)\in Z\}$, 则 $m(g(E))=0$. 根据定理 5.22(p.273) 的 (ii), 有 $g'(x)=0$ a.e. $x\in E$. 但是在 E 上处处有 $g'(x)>0$, 所以 $m(E)=0$. 对于任意的 $x_0\in[a,b]\setminus E$, g 在 x_0 处连续 (g 处处连续) 以及 f 在 $g(x_0)$ 处连续, 我们知道 $f(g(x_0))$ 在 x_0 处连续. 因此, $f(g)$ 在 $[a,b]\setminus E$ 上都是连续的, 它的不连续点集是零测集. 因此 $f(g)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

26. 设 $f\in R([0,1]),g(x)=x^2$, 试证明 $f(g)\in R([0,1])$.

Proof 根据题 25 的证明, $g'(x)$ 仅在一个零测集上等于 0 时也是对的. 所以本题成为上题的推论.

注: 这题同第 4 章的第 28 题, 那时我们直接证明 $f(x)$ 的连续点也是 $f(x^2)$ 的连续点.

27. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 且 $\overline{E} = \mathbb{R}$, $f \in L(\mathbb{R})$ 且满足

$$f(x+t) = f(x), t \in E, x \in \mathbb{R}.$$

试证明 $f(x) = C$(常数) a.e. $x \in \mathbb{R}$.

Proof 设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则 $F(x+y) = \int_0^y f(t)dt + \int_y^{x+y} f(t)dt$. 如果 $y \in E$, 那么第二个积分

$$\int_y^{x+y} f(t)dt = \int_0^x f(t+y)dt = \int_0^x f(t)dt.$$

所以 $F(x+y) = F(x) + F(y)$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 和 $y \in E$ 成立. 因为 E 在 $\mathbb{R}$ 中是稠的 and F is continuous, it follows that $F(x+y) = F(x) + F(y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}$. As $F(0) = 0$, we must have $F(x) = Cx$ for some C. Thus $f(x) = F'(x) = C$ a.e.

所以, $f(x) = 0$, a.e. $x \in \mathbb{R}$.

28. 试证明 $f \in \mathrm{Lip}1([0,1])$ 当且仅当存在 $f_n \in C^{(1)}([0,1])(n = 1, 2, \dots)$, 使得

(a) $|f_n'(x)| \le M(x \in [0,1], n = 1, 2, \dots)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x \in [0,1]$.

Proof '当':

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_n(y)| = \lim_{n\to\infty} |f_n'(\xi_n)||x-y| \le \lim_{n\to\infty} M|x-y| = M|x-y|,$$

故 f 为 Lipschitz 函数.

'仅当': 假设 f 是 L-Lipschitz 的. 延拓 $f(x)$ 到 $[0,1]$ 外: $f(x) = f(0)$ 对于 $x < 0$, $f(x) = f(1)$ 对于 $x > 1$. 延拓后的 f 仍然具有 Lipschitz 常数 L. 取一个标准的 mollifier $\phi_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $\phi_\epsilon \ge 0$ 及 $\|\phi_\epsilon\|_1 = 1$. 考虑 $f_\epsilon = f * \phi_\epsilon$, 那么 $f_\epsilon \in C^{(1)}([0,1])$ 且当 $\epsilon \to 0^+$ 时有 $f_\epsilon \to f$ 处处成立 (因为 f 一致连续), 所以只要证明每一个 f_ϵ 都是 Lipschitz 的, 且 Lipschitz 常数有一致的上界.

$$\begin{aligned}
|f_\epsilon(x) - f_\epsilon(y)| &= \left| \int f(x-z)\phi_\epsilon(z)dz - \int f(y-z)\phi_\epsilon(z)dz \right| \\
&\le \int |f(x-z) - f(y-z)|\, |\phi_\epsilon(z)| dz \\
&\le L|x-y| \|\phi_\epsilon\|_1 \\
&= L|x-y|.
\end{aligned}$$

29. 设 $f \in L([0,1])$, 且有 $\int_0^1 f(x)dx = 1$, 试证明

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(x)f(y)f(z)dz = \frac{1}{6}.$$

Proof 可以证明 $f(x)f(y)f(z) \in L([0,1]\times[0,1]\times[0,1])$

$$\int_{[0,1]^3} f(x)f(y)f(z)dxdydz = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3 = 1.$$

设 S_{xyz} 表示在单位立方体中满足 $z \le y \le x$ 那些点的集合, S_{zxy} 表示在单位立方体中满足 $y \le x \le z$ 那些点的集合等等. 这样的点集有 6 个, 两两的交是 0 测度的. 改变积分的变量, 我们看到这 6 个点集上的积分大小是相同的, 而这 6 个点集并起来是整个单位立方体, 所以在 S_{xyz} 上的积分是在整个单位立方体上的积分的 $\frac{1}{6}$, 而 $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x)f(y)f(z)dxdydz$ 恰好是在 S_{xyz} 上的积分, 所以它等于 $\frac{1}{6}$.